IL CONCETTO DI LIMITE

DEFINIZIONE DI LIMITE

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 diciamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo I_l centrato in l, piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo J_{x_0} centrato in x_0 tale che

$$f(x)\in I_l \text{ per ogni } x\in J_{x_0}, \quad x\neq x_0$$

Ponendo $I_l=(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ e $J_{x_0}=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ la definizione del tutto equivalente alla seguente

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 diciamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

se e soltanto se, per ogni $\varepsilon>0$, è possibile trovare $\delta>0$ tale che

$$0<|x-x_0|<\delta \rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

Supponendo $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=q$, si ha

- $\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]=l+q$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]=l\cdot q$
- $\lim_{x\to x_0} [\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{l}{q}$ (supposto $q\neq 0$)

Se $\phi(x)$ è limitata in un intorno x_0 (cioè se $\phi(x)\leqslant M \quad \forall x\in I_{x_0}$)
e $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$
allora $\lim_{x\to x_0} f(x)\phi(x)=0$

TEOREMA DEI CARABINIERI

Siano f , g , h tre funzioni definite in un intorno di x_0 tali che

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$$

in tale intorno e tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

allora esiste

$$\lim_{x\to x_0} h(x)$$

e vale

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

FUNZIONE CONTINUA

Se

$$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

si dice che f è continua in $x_0\in[a,b]$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

se f è continua in ogni punto del suo dominio si dice che f è continua.

Somma, prodotto e quoziente (dove è definito) di funzioni continue sono ancora funzioni continue. Inoltre si può dimostrare che la composizione di funzioni continue è anch'esso una funzione continua, cioè se

$g:[a,b] \to \mathbb{R}$ ed $f: g([a,b]) \to \mathbb{R}$

sono funzioni continue, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) \quad \forall x_0 \in [a,b]$$

Anche le funzioni trigonometriche sono funzioni continue
dal teorema dei carabinieri si ottiene che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

<u>TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI</u>

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, siano $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, tali che

$f(x_1) < 0$ ed $f(x_2) > 0$

allora esiste un punto $c \in [x_1, x_0]$ tale che $f(c) = 0$

una conseguenza di ciò è il teorema dei valori intermedi.

<u>TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI</u>

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, siano $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi fra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$

<u>TEOREMA DI WEIERSTRASS</u>

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora eistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$$

x_m si dice punto di minimo di f , $f(x_m)$ è il valore minimo della f

x_M si dice punto di massimo di f , $f(x_M)$ è il valore massimo della f

Dal teorema di Weierstrass e del teorema dei valori intermedi segue che se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora detti

m il valore minimo di f in $[a,b]$

M il valore massimo di f in $[a,b]$

risulta

$$f([a,b]) = [m, M]$$

<u>LIMITI DESTRO E SINISTRO</u>

È evidente che il limite non sempre esiste. Se il limite destro e il limite sinistro sono uguali, allora il limite esiste.

<u>LIMITI ALL'INFINITO E LIMITI INFINITI</u>

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

solo e soltanto se $0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) > M$

In questa situazione si dice che f ha un asintoto verticale in x_0

Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

se e soltanto se $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ a \in \mathbb{R}$ tale che $x > a \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

In questa situazione si dice che la retta orizzontale $y = l$ è un asintoto orizzontale di f per $x \rightarrow x_0$

Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \ a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > M \ \ \forall x \in (a, +\infty)$

In generale la retta

$$y = ax + b$$

è un asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$ se si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

e quindi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$$

<u>PROPRIETÀ DELLA PERMANENZA DEL SEGNO</u>

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \ x_0 \in (a, b)$$

sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$$

allora esiste un intorno I_{x_0} del punto x_0 tale che

$$f(x) > 0 \ \ \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>

Osservazione 1

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \ g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x) < g(x) \ \forall x \in (a, b), \ x_0 \in (a, b)$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Osservazione 2

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \ x_0 \in (a, b)$$

sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$$ (non vale il viceversa)

Osservazione 3

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \ x_0 \in (a, b)$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

SUCCESSIONI

Le funzioni definite sui numeri naturali

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sono definite successioni e sono denotate con la scrittura

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove $a_n = f(n)$

L'unico limite su cui si può investigare è quello all'infinito e si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \ \in \mathbb{R}$$

se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon \ \ \forall n \geqslant \bar{n}$$

Nel caso di $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ il limite viene chiamato numero di Nepero e viene definito come

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

DERIVATA

DEFINIZIONE

La pendenza del grafico di f per $x = x_0$ si chiama derivata di f in x_0 e si indica con

$f'(x_0)$ oppure con $\frac{df}{dx}(x_0)$

Tale pendenza è definita da

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ (purchè il limite esista e sia finito)

Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e si dice che la funzione non è derivabile in x_0

Se $f'(x_0)$ eiste, la retta tangente al grafico di f per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_{0,} f(x_0))$ la cui pendenza coincinde con quella del grafico stesso

essa avrà equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DIFFERENZIALE (LAGRANGE)

Sia $f : [a, b] \ \to \ \mathbb{R}$ continua, f derivabile in (a, b)

allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

ossia esiste un punto $c \in (a,b)$ dove f ha pendenza uguale alla pendenza della retta che congiunge i punti $(a,f(a))$, $(b,f(b))$

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, f derivabile in (a,b) e tale che $f(a)=f(b)$ allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c)=0$

COROLLARIO DEL TEOREMA DI LAGRANGE

- $f'(x)=0 \ \forall x \in (a,b) \quad \to \quad f(x)$ è costante in (a,b)
- $f'(x)>0 \ \forall x \in (a,b) \quad \to \quad f(x)$ è strettamente crescente in (a,b)
- $f'(x)\geqslant 0 \ \forall x \in (a,b) \quad \to \quad f(x)$ è crescente in (a,b)
- $f'(x)=g'(x) \ \forall x \in (a,b) \quad \to \quad f(x)-g(x)$ è costante in (a,b)

TEOREMA

Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ allora f è anche continua in x_0

PROPRIETÀ

Siano $f,g:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in (a,b)$ allora

- $f+g$ è derivabile in x_0 e si ha
  $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
- $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha
  $(f \cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
- se inoltre $g(x_0)\neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Sia f definita in un intorno x , derivabile in x , e sia g una funzione definita in un intorno di $y=f(x)$, derivabile in y

Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x e si ha

$$(g \circ f)'(x)=g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, f continua e invertibile

se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ ed inoltre $f'(x_0)\neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0=f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

o, equivalentemente

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Sotto le ipotesi del teorema precendente tale formula si ottiene direttamente dalla formula della derivata di una composta: basta derivare l'ugualianza

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

LOGARITMO ED ESPONENZIALE

Logaritmo

$$\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$(logx)' = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^p x}{\sqrt[n]{x}} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Esponenziale

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$e^{logx} = x \quad \forall x > 0$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano f , g due funzioni derivabili in un intorno di x_0
supponendo che $g'(x) \neq 0$ in tale intorno e che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

se esiste (finito o infinito) il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

il teorema è vero anche se $x_0 = \pm\infty$

ESPONENZIALE GENERALE (DI BASE A) E LOGARITMO IN BASE A

Sia $a > 0$
poichè $a = e^{\log a}$
risulta naturale definire

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

Dalle definizioni e dalle proprietà di e^x conseguono immediatamente le seguenti proprietà

- $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(a^x)' = a^x \log a$

Se $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione a^x è invertibile
la sua inversa si chiama logaritmo in base a di x e si indica con

$$\log_a x$$

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVI

Sia $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in (a,b)$ si dice di massimo relativo per f se esite un intorno I_{x_0} di x_0 tale che

$$f(x) \leqslant f(x_0) \ \ \forall x \in I_{x_0}$$

il valore $f(x_0)$ si dice massimo relativo di f

Analogamente si definiscono punti di minimo relativo e minimo relativo.

I punti dove $f'(x)=0$ sono detti punti critici.

Lo studio del segno della derivata permette di capire se questi sono punti di massimo o minimo relativi, oppure se sono punti cosiddetti di sella, cioè punti dove cambia la curvatura. La curvatura sarà data dalla crescenza (convessità) o descrescenza (concavità) della derivata.

Si può dire che

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$	x_0 è un punto di minimo relativo
$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$	x_0 è un punto di massimo relativo
$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0$	x_0 è un punto di sella (a tangente orizzontale)

INTEGRAZIONE

SOMMA DI RIEMANN

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa, cioè $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]$

si vuole definire l'area dell'insieme $S(f)=\{(x,y): a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

siano x_i , $i=0,1,\ldots,n$, punti $[a,b]$ tali che

$$a=x_0<x_1<x_2<x_{n-1}<x_n=b$$

in questo modo $[a,b]$ risulta diviso in n intervalli $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$

per ogni $i=1,2,\ldots,n$ si scelga un punto $\bar{x}_i \in [x_{i-1},x_i]$ e si consideri il rettagolo di base $[x_{i-1},x_i]$ e altezza $f(\bar{x}_i)$, la cui area è $f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$

Si definisce somma di Rienmann

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_1)(x_1 - x_{i-1})$$

Prendendo tutti gli intervalli della stessa lungezza

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \ \ \forall i=1,\ldots,n$$

Risulta

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$$

TEOREMA

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} R_n$$

Tale limite viene detto integrale da a a b della funzione f e si scrive

$$\int_a^b f(x)dx$$

PROPRIETÀ

Siano $f, g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, allora:

- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- se $c \in (a,b)$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

  in particolare

  $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

  dove m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f in $[a,b]$
- $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO INTEGRALE

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\exists\ c \in (a,b)$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

DEFINIZIONE DI PRIMITIVA O ANTIDERIVATA

Si dice che una funzione $F:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva in $[a,b]$ di $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ se e solo se

$$F'(x)=f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$$

TEOREMA

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$ allora

$G(x)-F(x)$ è costante

LA FUNZIONE INTEGRALE

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, la funzione integrale associata è definita mediante

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$F(x)$ rappresenta l'area con segno da a ad x, la variabile è l'estramo superiore di integrazione.

LA FUNZIONE INTEGRALE

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile, sia

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

la funzione integrale associata si ha

- se f è continua in $[a,b]$, allora F è derivabile in $[a,b]$ e si ha
  $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$
- se $G(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$, si ha
  $\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a)$

INTEGRALE INDEFINITO

Si dice integrale indefinito di f e si scrive

$\int f(x)dx$ (o semplicemente $\int f$)

una primitiva arbitraria di $f(x)$

Per l'integrale indefinito vale

$\int (f+g) = \int f+\int g$, $\int kf = k\int f$ (k costante)

INTEGRAZIONE PER PARTI

La formula della derivata di un prodotto dice che

$f'g=(fg)'-fg'$

ne segue che

$\int f'g = \int (fg)'-\int fg'$

cioè

$\int f'g = fg-\int fg'$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Dalla formula di derivazione di una funzione composta si ha che, se $G(t)$ è una primitiva di $g(x)$ (cioè $G'(t)=g(t)$),

allora $G(f(x))$ è una primitiva di $g(f(x))\cdot f'(x)$

infatti

$(G(f(x)))' = G'(f(x))\cdot f'(x) = g(f(x))\cdot f'(x)$

quindi, posto $t=f(x)$, da $G(f(x)) = G(t) = \int g(t)dt$, risulta

$\int g(t)dt = \int g(f(x))f'(x)\,dx$

INTEGRALE IMPROPRIO

Si considerino i seguenti casi

- $\int_a^b f(x)dx$ quando f è continua in $(a,b]$
- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, f continua in $[a,+\infty)$

integrali di questo tipo vengono detti impropri

OSSERVAZIONE

Un polinomio x^2+bx+c , che non ha radici reali, si può sempre scrivere nella forma $(x-\alpha)^2+\beta^2$, dove $\alpha\pm i\,\beta$ sono le sue due radici complesse. Si può così, con una semplice sostituzione, calcolare ogni integrale del tipo $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx$ (x^2+bx+c senza radici reali) riconoscendolo all'integrale ben noto $\frac{1}{\beta}\cdot\int\frac{1}{1+t^2}dt$.

INTEGRALE DI QUOZIENTI DI POLINOMI

È chiaro che, tramite la divisione di polinomi, ci si può ridurre a trattare il caso $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con $gradP(x)<gradQ(x)$.

Nel caso $gradQ(x)=2$ ci sono tre possibilità:

- $Q(x)$ ha due radici reali a_1 , a_2 distinte:
  in questo caso $Q(x)$ si può scrivere come $(x-a_1)(x-a_2)$ e $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scomporre nella forma $\frac{A}{x-a_1}+\frac{B}{x-a_2}$
  la primitiva sarò quindi del tipo $A\log|x-a_1| + B\log|x-a_2|$
- $Q(x)$ ha due radici reali a_1 , a_2 coincidenti:
  in questo caso $Q(x)$ si può scrivere come $(x-a_1)^2$ e $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scomporre nella forma $\frac{C}{(x-a_1)}+\frac{D}{(x-a_1)^2}$
  la primitiva sarà quindi del tipo $C\log|x-a_1| - \frac{D}{x-a_1}$
- $Q(x)$ non ha radici reali:
  in questo caso si può scrivere $Q(x)$ come somma di quadrati e gli integrali, a meno di costanti moltiplicative, si ridurranno alla forma $\int\frac{1}{t^2+1}dt$ oppure $\int\frac{2\text{t}}{t^2+1}dt$, che valgono rispettivamente $\arctan(t)$ e $\log(1+t^2)$

SUCCESSIONI E SERIE

SUCCESSIONI

Una successione può essere espressa in forma esplicita, ad esempio

$a_n=\frac{1}{n}$, $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $a_n=\sqrt[n]{n}$, ecc ecc

oppure può essere definita per ricorrenza, cioè ogni termine è definito a partire dai precedenti, ad esempio

$\begin{cases} a_0=1 \\ a_{n+1}=1+a_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$, $\begin{cases} b_0=1 \\ b_1=1 \\ b_{n+1}=b_n+b_{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

La formulazione

$$S_n = S_n(q) = q+q^2+...+q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k$$

non è esplicita ma si sa che

$$S_n(q) = \begin{cases} \dfrac{q-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n & q=1 \end{cases}$$

Una successione che ha limite finito si dice convergente.

DEFINIZIONI E PROPRIETÀ

- a_n si dice limitata se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n è crescente se $a_n \leqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  a_n è decrescente se $a_n \geqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  le successioni crescenti o decrescenti vengono dette monotone
- se a_n è convergente allora è limitata, non vale il viceversa
- se a_n è limitata e monotona allora è convergente
- se a_n è monotona ma non limitata allora $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$

SERIE

In generale, data una successione a_n , si può considerare la successione delle somme parziali di a_n , cioè

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La successione S_n si chiama serie di termine generale a_n .

ESEMPI DI SERIE

- $a_n = q$ si ha $S_n = nq$
- $a_n = q^n$ si ha $S_n = S_n(q)$
  questa serie si definisce serie geometrica di ragione q
- $a_n = \dfrac{1}{n}$ si ha $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$
  questa serie si definisce serie armonica

DEFINIZIONI

- Una serie si dice convergente se esiste
  $$\lim_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$
  si scriverà
  $$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
  e si dirà che S è la somma della serie
- Una serie si dice divergente se esiste

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$$

si scriverà anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$$

se il terminie generale a_n è positivo la serie ha sempre limite, finito o $+\infty$, quindi la serie converge o diverge

- Una serie si dice indeterminata se non esiste

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

NOTA

Il termine di una serie convergente tende a zero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$$ (cioè la serie converge)

$$a_n \xrightarrow{n} 0$$

Questa condizione è necessaria ma non sufficiente affinche la serie converga, quindi può essere utile solo per dimostrare la non convergenza di una serie.

CRITERIO DEL CONFRONTO INTEGRALE

Sia $f \geqslant 0$, continua e decrescente in $[1,+\infty)$

allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = +\infty$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano

$$a_n \geqslant 0 \quad , \quad b_n \geqslant 0 \quad , \quad a_n \geqslant b_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano

$$a_n \geqslant 0 \quad , \quad b_n > 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \qquad L \in \mathbb{R}$$

allora

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

hanno lo stesso comportamento

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia

$a_n > 0$

e

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n} L$

allora:

- se $L < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$
- se $L > 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$
- se $L = 1$ nulla può dirsi in generale

CRITERIO DELLA RADICE

Sia

$a_n > 0$

e

$\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n} L$

allora

- se $L < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$
- se $L > 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$
- se $L = 1$ nulla può dirsi in generale

DEFINIZIONE DI CONVERGENZA ASSOLUTA

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, converge assolutamente se e soltanto se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Quindi se una serie converge assolutamente allora converge (si dice anche semplicemente).

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNI

Una serie del tipo

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

si dice serie a segni alterni

CRITERIO DI LEIBNIZ

Se

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a_n decrescente, $a_n \downarrow 0$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$$

SERIE DI POTENZE

Una serie il cui termine generale è del tipo

$$a_n = a_n(x) = c_n (x - x_0)^n$$

si definisce serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Le serie di potenze si possono pensare come la naturale generalizzazione dei polinomi.
I criteri del rapporto e della radice sono particolarmente utili nello studio della convergenza di questo tipo di serie.

TEOREMA

Sia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$$

allora

$L = 0 \ \rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge assolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$L = +\infty \ \rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ non converge per alcun $x \neq x_0$

$0 < L < +\infty \ \rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge assolutamente per $|x - x_0| < \frac{1}{L}$

non converge per $|x - x_0| > \frac{1}{L}$

DEFINIZIONE DI RAGGIO DI CONVERGENZA

$$r = \begin{cases} +\infty & L = 0 \\ \dfrac{1}{L} & 0 < L < +\infty \\ 0 & L = +\infty \end{cases}$$

si chiama raggio di convergenza.
Il teorema precedente dice che una serie di potenze converge assolutamente in un intervallo aperto centrato in x_0 , e precisamente nell'intervallo

$$(x_0 - r, x_0 + r)$$

Negli estremi $x_0 - r$, $x_0 + r$ la convergenza va studiata caso per caso.

TEOREMA

Sia

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergente per $|x| < r$

allora esiste

$$(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)'$$
e vale
$$(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-r, r)$$
(cioè le serie di potenze si possono derivare termine a termine)

SERIE DI TAYLOR

Se
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad |x| < r$$
allora si ha
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
questa serie viene definita serie di Taylor della funzione f , centrata in $x_0 = 0$.
Se f è sviluppabile in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$, allora f è derivabile infinite volte in $x_0 = 0$. Il vice versa non è vero.

DEFINIZIONE DI FUNZIONE SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR

Si dice che $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno dell'origine se esiste $r > 0$ tale che
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x : |x| < r$$
In generale, $f(x)$ si dice sviluppabile in serie di Taylor in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x : |x - x_0| < r$$

DEFINIZIONE DI POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f derivabile n volte in $x = x_0$
il poliomio
$$P_n = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)} \frac{(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$
si chiama polinomio di Taylor della funzione f centrato in $x = x_0$.

Si vede che P_n è l'unico polinomio di grado al più n verificante che
se f è derivabile n volte in x_0 ,posto
$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)$$
$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$
allora
$$E_n(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Si può osservare che P_n è la somma parziale n essima della serie di Taylor centralta in $x = x_0$ della funzione $f(x)$

Per affermare che la somma della serie di Taylor di f è proprio f deve essere

$$\lim_{n \to \infty} [f(x) - P_n(x)] = 0$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un'equazione differenziale ordinaria è una relazione del tipo

$$g(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

tra una variabile indipendente t , una funzione incognita $y(t)$ ed un numero finito delle sue derivate $y'(t)$, $y''(t)$,..., $y^{(n)}(t)$.

(g è una funzione di $n+2$ varibili nota)

L'equazione si dice di ordine n se la derivata di ordine massimo che compare è quella n esima.

Esplicitando la derivata di ordine massimo si ottiene un'equazione detta in forma normale.

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

<u>PROBLEMA DI CAUCHY</u>

Il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è noto come problema di Cauchy.

<u>EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI</u>

Sia

$$f(t, y) = \frac{A(t)}{B(y)}$$

dove $A(t)$ e $B(y)$ sono due funzioni continue, definite rispettivamente in intorni di t_0 e y_0 e inoltre $B(y_0) \neq 0$

Allora si può dire che esiste un intorno di t_0 dove il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{A(t)}{B(y(t))} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione ed essa è unica.

Deve essere

$$\int_{t_0}^{t} B(y(\tau))\, y'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$$

cioè

$$\int_{y_0}^{y(t)} B(s)ds \ = \ \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Sia

$$y'(t)+a(t)\,y(t) = b(t)$$

dove $a(t)$ e $b(y)$ sono funzioni continue assegnate.

Lequazione si dice lineare per il fatto che l'operatore L definito da

$$L(y) = y'+ay$$

è un operatore lineare.

Il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y'(t)+a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione (globale, cioè definita $\forall t \in \mathbb{R}$) e tale soluzione è unica.

$$y(t) \ = \ e^{-\int a(t)dt}[\int e^{\int a(t)dt} y(t)dt+k]$$

METODO DI RISOLUZIONE PER SERIE

Bisogna supporre che la soluzione del problema di Cauchy sia una funzione $y(t)$ sviluppabile in serie di potenze, cioè

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

e usando il teorema di derivazione, scrivere l'equazione como ugualianza tra due serie di potenze.

Poichè due serie di potenze sono uguali se e soltanto se lo sono tutti i loro coefficienti, da tale ugualianza e dalla condizione iniziale si rivacano gli a_n e si ha così la funzione $y(t)$, o almeno una sua approssimazione.

METODO DI EULERO

Partendo da (t_0, y_0) si approssima, fino a $t=t_1$, la soluzione $y(t)$ con la sua retta tangente $y_1=t$. Poi ripartendo da $(t_{1,} y_1)$ si considera un altro tratto, fino a $t=t_2$.

Procedendo in questo modo al passo $(n+1)$ -esimo, considerando la retta $y_{n+1}(t)$ per (t_n, y_n) con pendenza $f(t_n, y_n)$, la sua equazione è

$$y_{n+1}(t) = y_n+f(t_n, y_n)(t-t_n)$$