Disposizioni con ripetizione

Ogni ordinamento di k oggetti scelti tra n (es AB, AA)

$$D_{n,k} = n^k$$

Disposizioni senza ripetizione

Ogni ordinamento di k oggetti scelti tra n (es. AB, BA)

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutazioni

Disposizioni $n = k$

$$P_n = n!$$

Conbinazioni con ripetizione

Non ha importanza l'ordine

$$C_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$$

Combinazioni senza ripetizione

Non ha importanza l'ordine e non si può ripeterte lo stesso elemento

$$C_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Probabilità condizionata

$$\mathbb{P}(F \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)...\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Formula di Bayes

$$\mathbb{P}(H_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(B \mid H_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(B \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(B \mid H_i)}$$

Indipendenza

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \qquad \begin{array}{l} \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) \end{array}$$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Funzioni di densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Densità di probabilità

v.a. reali:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

v.a. discrete:

$$\sum_i p_i = 1$$

Distribuzione della somma di due variabili ($Z = X + Y$)

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \int\int_{A_z} f(x,y)dydx = \int_0^{\infty}\int_0^{z-x} f_X(x)f_Y(Y)dydx$$

$$f_Z(z) = \int_0^z f_Y(z-x)f(x)$$

Distribuzione del minimo di due variabili ($Z = min\{X, Y\}$)

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

Matrice di transizione

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_j \,|\, X_{t_n} = x_i) = p_{ij}^{(n)}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1}^{(n)} & ... & p_{1,m}^{(n)} \\ ... & ... & ... \\ p_{m,1}^{(n)} & ... & p_{m,m}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(n)} = 1$$

Probabilità di transizione

Dallo stato x_i allo stato x_j in n passi

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$$

$$P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right) = P^{(n-1)} \cdot P = P^{n-1} \cdot P = P^n$$

Equazione Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Determinazione dello stato del sistema

$$\pi_k^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = x_k)$$

$$\pi^{(n)} = \left(\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_r^{(n)}\right)$$

$$\pi_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}(X_n = x_k \mid X_0 = x_j)\mathbb{P}(X_0 = X_j) = \sum_{j=1}^{r} p_{jk}^{(n)} \pi_j^{(0)}$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

Matrice di transizione irriducibile

Tutti gli stati comunicano fra loro (se, dati due stati i e j, j è raggiungibile da i e viceversa)

Catena aperiodica

$$D_x = \left\{n : p_{x,x}^{(n)} > 0\right\} \qquad d_x = MCD\left\{D_x\right\}$$

Se P è una matrice irriducibile, $d_x = d$ è costante per ogni x.

Una catena irriducibile di periodo $d = 1$ è detta aperiodica

Catena regolare, ergodica

Una catena aperiodica è regolare, quindi ergodica

Media

v.a. discreta

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k$$

v.a. continua

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Varianza

$$Var\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$$

Distribuzioni

	Distribuzione o densità	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$
Binomiale	$p_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Geometrica	$p_k = p(1-p)^k$ $F(k) = 1-(1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Esponenziale	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$